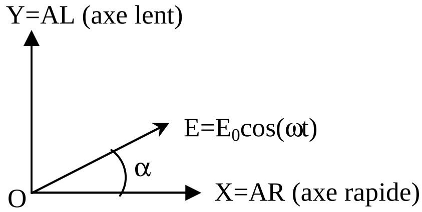
Rappels sur la polarisation et la biréfringence (TP 4, 5 et 6)

I. Action des lames quart d'onde, demi-onde et onde sur une vibration polarisée

A. Action sur une vibration rectiligne



Polarisation rectiligne incidente

$x_0 = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$

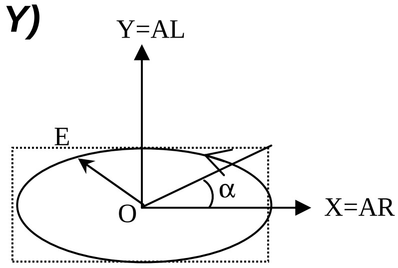
$y_0 = E_0 \sin\alpha \cos\omega t$

Composantes de la vibration à la sortie d'une lame

La lame est définie par la différence de marche δ apportée entre les deux composantes de la polarisation suivant ses lignes neutres (X,Y), et le déphasage $\phi = 2\pi/\lambda\ \delta$ correspondant :

$\delta = \lambda/4$ $\phi = \pi/2$ $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - \boldsymbol{\pi/2})$ soit $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha\ \mathbf{sin}\ \omega t$ elliptique gauche d'axes (X,Y)	$\delta = \lambda/2$ $\phi = \pi$ $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - \boldsymbol{\pi})$ soit $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = \mathbf{-}\ E_0 \sin\alpha \cos\omega t$ rectiligne symétrique / axes X ouY	$\delta = \lambda$ $\phi = 2\pi$ $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \cos(\omega t - \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$ soit $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \cos\omega t$ rectiligne identique

B. Action sur une vibration elliptique d'axes (X,Y)



Polarisation elliptique incidente gauche

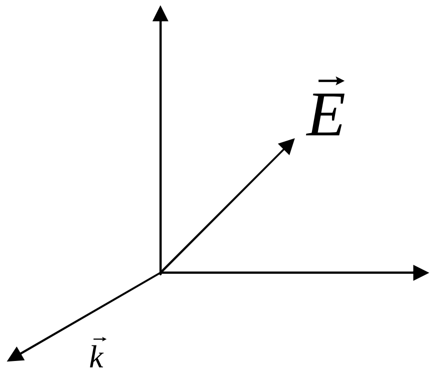
$x_0 = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$

$y_0 = E_0 \sin\alpha \sin\omega t$

Composantes de la vibration à la sortie d'une lame :

$\delta = \lambda/4$ $\phi = \pi/2$ $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \sin(\omega t - \boldsymbol{\pi/2})$ soit $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = -E_0 \sin\alpha \cos\omega t$ rectiligne (symétrique de celle I.1.a)	$\delta = \lambda/2$ $\phi = \pi$ $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \sin(\omega t - \boldsymbol{\pi})$ soit $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = -\ E_0 \sin\alpha \sin\omega t$ elliptique renversée	$\delta = \lambda$ $\phi = 2\pi$ $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \sin(\omega t - \mathbf{2}\boldsymbol{\pi})$ soit $x = E_0 \cos\alpha \cos\omega t$ $y = E_0 \sin\alpha \sin\omega t$ elliptique identique

II. L'Action des lames quart d'onde, demi-onde et onde sur une vibration polarisée peut être aussi traité avec le formalisme de Jones.



$$\vec{E} = \begin{vmatrix} A_x \cos(wt - \vec{k}\vec{r}) \\ A_y \cos(wt - \vec{k}\vec{r} + \varphi) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Le champ peut être écrit dans la représentation de Jones par le vecteur suivant:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}} \begin{vmatrix} A_x \\ A_y e^{i\varphi} \end{vmatrix}$$

Dans le formalisme de Jones les éléments polarisant sont décrits par des matrices et s'écrivent:

Polariseur selon x: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

Polariseur selon y: $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Elément biréfringent entraînant un déphasage φ

$$\begin{vmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{vmatrix}$$

Pour connaître l'expression J' de la matrice de Jones d'un élément J dont les axes font un angle θ avec le champ électrique incident, on applique alors les matrices de rotation :

$$J' = R(-\theta) J R(\theta)$$

Avec

$$R(\theta) = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

III. Biréfringence (fin TP 4)

Un milieu homogène est dit anisotrope quand certaines de ses propriétés vectorielles ne sont pas les mêmes dans les diverses directions qui rayonnent autour d'un point.

A. Tenseur de perméabilité relative

A l'intérieur de tel matériau, la relation constitutive entre le vecteur induction électrique $\vec{D}$ et le vecteur champ électrique $\vec{E}$ s'écrit alors: $\vec{D} = \varepsilon_0 [\varepsilon_r] \vec{E}$

où $[\varepsilon_r] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,x} & \varepsilon_{x,y} & \varepsilon_{x,z} \\ \varepsilon_{y,x} & \varepsilon_{y,y} & \varepsilon_{y,z} \\ \varepsilon_{z,x} & \varepsilon_{z,y} & \varepsilon_{z,z} \end{pmatrix}$ est le tenseur de perméabilité relative et ε_0 est la perméabilité du vide.

La diagonalisation de $[\varepsilon_r]$ conduit alors à la détermination de trois valeurs possibles pour l'indice de réfraction :

$n_1 = \sqrt{\varepsilon_{r,1}}$, $n_2 = \sqrt{\varepsilon_{r,2}}$ et $n_3 = \sqrt{\varepsilon_{r,3}}$ où $\varepsilon_{r,1}$, $\varepsilon_{r,2}$ et $\varepsilon_{r,3}$ sont les valeurs propres de la matrice $[\varepsilon_r]$

a) Matériau isotrope

Les trois indices sont égaux ($n_1 = n_2 = n_3 = n$)

b) Matériau anisotrope uniaxe

Deux des trois indices sont égaux.
On définit alors un indice ordinaire ($n_o = n_1 = n_2$) et un indice extraordinaire ($n_e = n_3$).

Si $n_e > n_o$ le milieu est alors **uniaxe positif**.

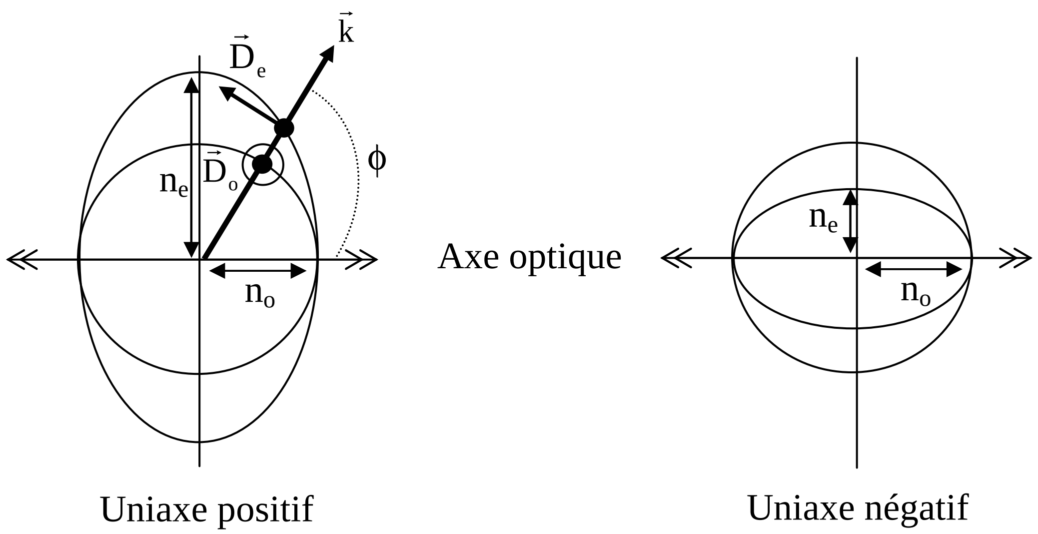
Si $n_e < n_o$ le milieu est dit **uniaxe négatif**

c) Matériau anisotrope biaxe

Les trois indices sont différents ($n_1 \neq n_2 \neq n_3$)

B. Surface des indices d'un matériau anisotrope uniaxe

Tandis que la surface d'indice d'un milieu isotrope est constituée d'une sphère dont le rayon est donné par l'indice de réfraction du matériau, la surface des indices d'un milieu uniaxe se compose de deux nappes : une sphère et un ellipsoïde de révolution autour de l'axe optique.



Pour une direction de propagation de l'onde faisant un angle ϕ avec l'axe optique du cristal, l'intersection du vecteur d'onde avec la surface des indices conduit à la détermination de deux valeurs possibles de l'indice de réfraction. Le choix de l'indice de réfraction vu par l'onde dépend alors de son état de polarisation. Pour une polarisation ordinaire ($\vec{D}_o \perp$ au plan formé par la direction de propagation et l'axe optique du cristal) l'indice de réfraction vu par l'onde sera n_0, tandis que pour une polarisation extraordinaire ($\vec{D}_e \perp$ au plan formée par $\vec{D}_o$ et par la direction de propagation) l'indice de réfraction vu par l'onde aura alors une valeur intermédiaire n donnée par :

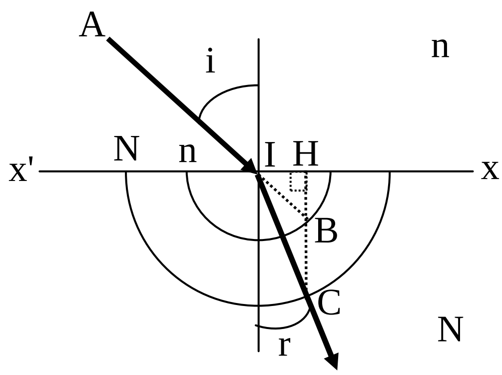
$$n^2\left(\frac{\sin^2\phi}{n_e^2}+\frac{\cos^2\phi}{n_o^2}\right)=1$$

Nota Bene: L'axe optique apparaît donc comme la direction de propagation particulière pour laquelle la dégénérescence des deux indices de réfraction n'est pas levée. Le matériau anisotrope ne présente alors qu'un seul indice de réfraction et se comporte pour cette direction de propagation particulière comme un cristal isotrope.

C. Réfraction d'une onde plane - Construction géométrique des rayons.

a) Rappel: Le milieu incident est isotrope ; le milieu de transmission est isotrope

La surface des indices du milieu incident est une sphère de rayon n ; celle du milieu de transmission est une sphère de rayon N. Le prolongement du rayon incident AI coupe la sphère de rayon n au point B. On abaisse du point B la perpendiculaire BH à la surface de séparation x' x. BH coupe le cercle de rayon N en C . Le rayon réfracté est alors IC.



On montre facilement que les angles i et r vérifient la relation de Descartes: $n\sin(i) = N\sin(r)$

b) Cas d'un milieu incident est anisotrope uniaxe ; le milieu de transmission est isotrope

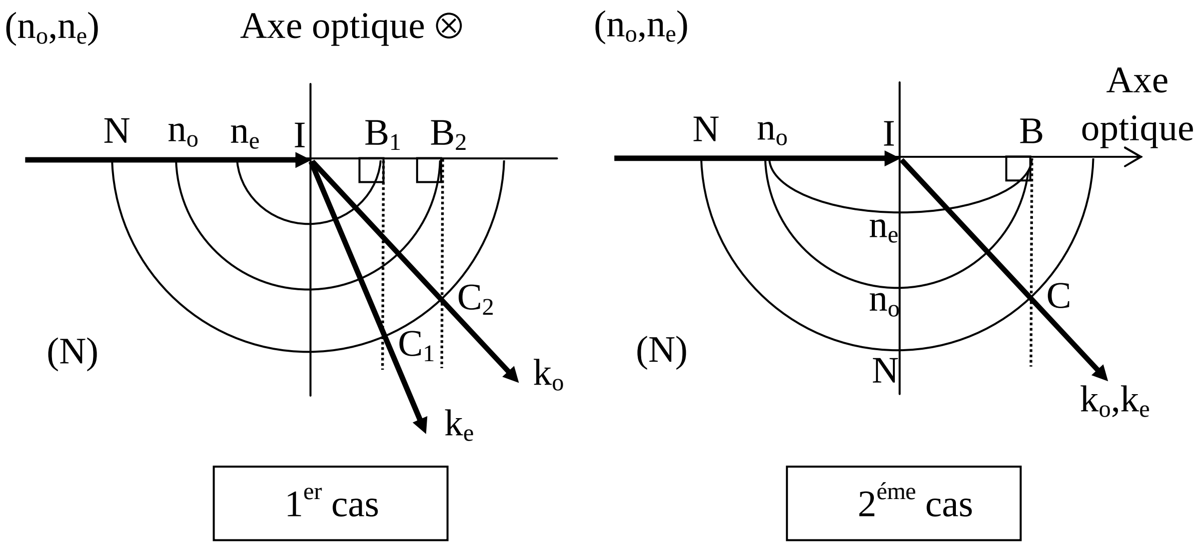
Si on généralise la construction précédente en tenant compte du fait que le milieu anisotrope a une surface des indices composée de deux nappes, on obtient deux directions réfractées représentant les vecteurs d'onde ordinaire et extraordinaire. Dans le cas particulier du TP 4, l'axe optique du cristal anisotrope se trouve dans le plan de l'interface et on considère dans le milieu anisotrope le rayon d'incidence rasante. On supposera de plus $n_e < n_o$ (uniaxe négatif) pour faire la figure.

1er cas de figure : axe optique perpendiculaire au plan d'incidence

La construction se fait de la même manière que précédemment et la figure donne deux directions réfractées IC_1 et IC_2: l'une pour le vecteur d'onde ordinaire et l'autre pour le vecteur d'onde extraordinaire.

2ème cas de figure : axe optique dans le plan d'incidence

La construction se fait de la même manière que précédemment. Les vecteurs d'onde ordinaire et extraordinaire voient tous deux le même indice $IB = n_o$ dans le milieu anisotrope et les rayons réfractés sont confondus suivant IC.



En conclusion : Lorsque l'on fait pivoter le cristal à étudier autour de la normale au plan de l'interface, on constate que :

1/ le rayon ordinaire garde un angle de réfraction constant qui correspond à l'indice ordinaire n_o.

2/ le rayon extraordinaire se déplace entre deux positions extrêmes correspondant respectivement aux indices n_o et n_e, suivant que l'axe optique est placé dans la direction du rayon incident ou perpendiculaire.

Représenter sur les deux schémas précédents les directions de polarisation $\vec{D}_o$ et $\vec{D}_e$ correspondant aux deux rayons ordinaire et extraordinaire (*** à faire avant la séance).